TEMA 5:

NÚMEROS RACIONALES

ÍNDICE:

1 – INTRODUCCIÓN

Nos encontramos ante un tema de gran importancia, ya que como nos marca la LOE y su desarrollo en el decreto 133/07 (para Galicia), los contenidos que enseñemos a nuestros alumnos deben procurar ser significativos para estos, y en este tema encontrarán de manera muy clara la funcionalidad para su vida diaria (algo así, que puedas meter algo de leyes)

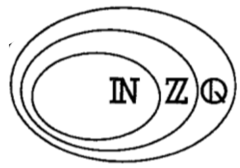
El uso de las fracciones o números racionales tuvo lugar mucho antes que el de los enteros negativos, ya que eran necesarias para resolver y expresar multitud de situaciones de la **vida cotidiana del hombre primitivo** (por ejemplo, a la hora de repartir la caza del día entre los miembros de la tribu).

Así, las fracciones aparecen en los textos matemáticos más antiguos, como ocurre en el famoso **papiro de Rhind** (escrito en Egipto hacia el año 1550 aC); donde se hacen múltiples referencias a las fracciones y a las operaciones con las mismas.

De todos modos, la forma actual de escribir las fracciones (2/3, 5/7, 4/10,.....) y de hacer aritmética con ellas data de los siglos XV y XVI.

Desde el punto de vista estrictamente matemático se suele decir que los números racionales surgen ante las limitaciones de los números enteros a la hora de resolver ecuaciones del tipo $\mathbf{a \cdot x = b}$, $\forall a,b \in Z$.

Como vemos, para encontrar solución a esta ecuación en todos los casos debemos ampliar el conjunto de los números enteros; dando lugar así al conjunto de los números racionales.



2 – EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Para la construcción formal del conjunto de los números racionales se suele considerar el conjunto de pares ordenados $\mathbf{Z \times Z^* = \{(a,b)/a \in Z,\ b \in Z^*\}}$ (con $Z^* = Z - \{0\}$).

Cada uno de estos pares (a,b) se denomina fracción y se escribe normalmente como $\frac{a}{b}$; siendo a el **numerador** y b el **denominador**.

Dentro del conjunto $Z \times Z^*$ se define la siguiente relación de equivalencia

$$\boxed{\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c}$$

y esta es, en efecto, una relación de equivalencia; ya que es reflexiva, simétrica y transitiva.

La relación de equivalencia $\sim$ divide al conjunto $Z \times Z^*$ en clases de equivalencia; y **cada una de estas clases de equivalencia constituye un número racional**. Es decir, la clase de equivalencia $\left\{\frac{a}{b}\right\}$ constituye un número racional, siendo $\frac{a}{b}$ un representante de dicha clase.

A su vez, el **conjunto cociente** **Z×Z*/~** formado por todas las clases de equivalencia se conoce como conjunto de los números racionales y se denota por Q.

De la definición de número racional se extraen algunas propiedades importantes que se enumeran a continuación:

- Sea h un entero $\neq 0$, $\Rightarrow \boxed{\frac{a}{b} \sim \frac{a \cdot h}{b \cdot h}}$, y a partir de esta propiedad se extraen dos consecuencias fundamentales para el trabajo con fracciones:

  a) Dados dos n^{os} racionales cualesquiera, siempre es posible hallar dos representantes de los mismos que tengan el mismo denominador (**reducir a común denominador**).

  Sean $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in$Q tal que m.c.m(b,d) = m $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m = b \cdot b' \\ m = d \cdot d' \end{array} \right\}$ de forma que:

  $$\frac{a}{b} \sim \frac{a \cdot b'}{b \cdot b'} = \frac{a'}{m} \quad \text{y} \quad \frac{c}{d} \sim \frac{c \cdot d'}{d \cdot d'} = \frac{c'}{m}$$

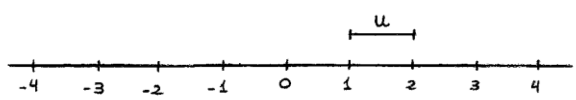
  b) Todo nº racional tiene un representante $\frac{a}{b}$ tal que a y b son primos entre sí; y a este representante se le llama **fracción irreducible**. En la práctica se adopta como representante canónico de un nº racional a la fracción irreducible de denominador positivo.

- Las fracciones del tipo **0/b** constituyen una clase, es decir, un número racional. Dicha clase recibe el nombre de nº racional cero y se representa por 0.

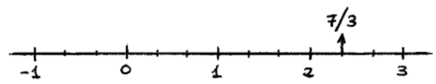
- Las fracciones del tipo **b/b** constituyen una clase, es decir, un número racional. Dicha clase recibe el nombre de nº racional uno y se representa por 1.

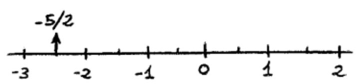
3 – REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Sobre una recta tomamos un punto origen O como representante de la clase {0}. Elegimos un segmento como unidad de longitud y lo llevamos sucesivamente a la derecha y a la izquierda de O, dando lugar a las marcas de los números enteros positivos y negativos respectivamente.

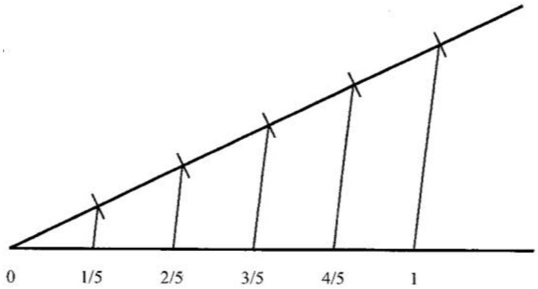


Para representar la fracción m/n dividiremos los segmentos de longitud unidad en n partes iguales (creándose así segmentos "secundarios" de longitud 1/n). Luego tomaremos m de esos segmentos "secundarios" a la derecha o a la izquierda de O (dependiendo de si m es un entero positivo o negativo) y ya tendremos así localizado el número racional m/n. Por ejemplo:





A la hora de dividir un segmento en n partes iguales, el teorema de Tales nos proporciona un método geométrico rápido y sencillo mediante el simple trazado de rectas paralelas. Por ejemplo:



4 – SUMA DE NÚMEROS RACIONALES

La suma o adición de números racionales viene dada por la aplicación

$$\boxed{\begin{array}{l} Q\times Q \xrightarrow{+} Q \\ (\alpha,\beta) \;\to\; \alpha+\beta=\left\{\dfrac{a}{b}\right\}+\left\{\dfrac{a'}{b'}\right\}=\left\{\dfrac{a\cdot b'+a'\cdot b}{b\cdot b'}\right\} \end{array}}$$

la cual presenta las siguientes propiedades:

- **Uniforme**, ya que la suma $\alpha+\beta$ es independiente de los representantes elegidos. Esta propiedad nos permite operar siempre con representantes de igual denominador, en cuyo caso la suma de números racionales se reduce a:

$$\boxed{\alpha+\beta=\left\{\frac{a}{d}\right\}+\left\{\frac{b}{d}\right\}=\left\{\frac{a+b}{d}\right\}}$$

- **Interna**, ya que por la propia definición de la suma $\forall\alpha,\beta\in Q \Rightarrow (\alpha+\beta)\in Q$.
- **Conmutativa**, ya que $\alpha+\beta=\beta+\alpha$.
- **Asociativa**, ya que $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$.
- **Elemento neutro**, ya que $\alpha+0=\alpha=0+\alpha$, siendo $0=\{0/d\}$.
- **Elemento simétrico**, pues $\alpha+(-\alpha)=0=(-\alpha)+\alpha$ (con $\alpha=\left\{\frac{a}{d}\right\}$ y $(-\alpha)=\left\{-\frac{a}{d}\right\}$) .

  [a partir de aquí se puede definir la resta de números racionales como $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$]

Y por cumplirse todas estas propiedades decimos que la estructura algebraica (Q,+) es un **grupo aditivo abeliano**.

5 – MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

La multiplicación o producto de números racionales viene dada por la aplicación

$$\boxed{\begin{array}{l} Q \times Q \xrightarrow{\;\cdot\;} Q \\ (\alpha, \beta) \;\rightarrow\; \alpha \cdot \beta = \left\{\dfrac{a}{b}\right\} \cdot \left\{\dfrac{a'}{b'}\right\} = \left\{\dfrac{a \cdot a'}{b \cdot b'}\right\} \end{array}}$$

la cual presenta las siguientes propiedades:

- **Uniforme**, pues el producto $\alpha \cdot \beta$ es independiente de los representantes elegidos.
- **Interna**, ya que por la propia definición del producto $\forall \alpha, \beta \in Q \Rightarrow \alpha \cdot \beta \in Q$.
- **Conmutativa**, ya que $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.
- **Asociativa**, ya que $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$.
- **Elemento neutro**, ya que $\alpha \cdot 1 = \alpha = 1 \cdot \alpha$, siendo $1 = \{d/d\}$.
- **Elemento simétrico**, ya que $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1 = \alpha^{-1} \cdot \alpha$ (siendo $\alpha = \left\{\dfrac{a}{d}\right\}$ y $\alpha^{-1} = \left\{\dfrac{d}{a}\right\}$) .

(Es decir, todo número racional $\alpha = \{a/d\}$ tiene simétrico siempre que $a \neq 0$)
Y por cumplirse todas estas propiedades decimos que la estructura algebraica $(Q, \cdot)$ es un **grupo multiplicativo abeliano**.

6 – EL CUERPO DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Si relacionamos la suma y la multiplicación de números racionales vemos que se verifica (al igual que ocurría en el conjunto de los números enteros) la propiedad **distributiva** del producto respecto a la suma: $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

En virtud de esta propiedad y de todas las que vimos en los dos apartados anteriores, podemos afirmar que la estructura algebraica **$(Q,+,\cdot)$ es un cuerpo conmutativo**.

7 – RELACIÓN DE ORDEN EN Q

Dados dos números racionales α y β, diremos que α es menor que β $(\alpha < \beta)$ si $(\beta - \alpha) > 0$. En este caso también se podría decir que β es mayor que α $(\beta > \alpha)$.

Por otra parte, diremos que α es menor o igual que β $(\alpha \leq \beta)$ si $(\beta - \alpha) \geq 0$; y esta relación $\leq$ es una relación de orden por cumplir las propiedades **Reflexiva** $(\alpha \leq \alpha)$, **Antisimétrica** (si $\alpha \leq \beta$ y $\beta \leq \alpha \Rightarrow \alpha = \beta$) y **Transitiva** (si $\alpha \leq \beta$ y $\beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha \leq \gamma$) .

Se dice también que la relación $\leq$ es una relación de **orden total**, ya que todos los números racionales son comparables entre sí por dicha relación ($\alpha \leq \beta$ o $\beta \leq \alpha$). Como consecuencia de ello diremos que Q es un conjunto totalmente ordenado.

A continuación se citan otras importantes propiedades de la relación de orden en el conjunto de los números racionales:

a) La relación de orden ≤ es compatible con la suma.

Si $\alpha \leq \beta$, se cumple que $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$ (para cualquier $\gamma \in Q$)

b) La relación de orden ≤ no es siempre compatible con el producto (sólo se conserva si se multiplica por un número positivo).

Si $\alpha \leq \beta$, se cumple que $\alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$ si $\gamma \in Q^+$ o $\alpha \cdot \gamma \geq \beta \cdot \gamma$ si $\gamma \in Q^-$

c) En Q se verifica la propiedad arquimediana.

Si $0 < \alpha < \beta \Rightarrow \exists\, n \in N$ tal que $\alpha \cdot n > \beta$

d) Entre dos n^{os} racionales existen infinitos n^{os} racionales (orden denso).

Si α y β son dos números racionales tales que $\alpha < \beta$, entonces siempre existirá otro número racional γ tal que $\alpha < \gamma < \beta$. Por ejemplo, si $\alpha = \left\{ \dfrac{a}{d} \right\}$ y $\beta = \left\{ \dfrac{b}{d} \right\}$, el número racional $\gamma = \left\{ \dfrac{a+b}{2 \cdot d} \right\}$ siempre cumpliría la condición anterior.

Esta propiedad de la densidad del orden en Q (que no existe ni en N ni en Z) hace que resulte imposible hablar del nº racional anterior o posterior a uno dado.

8 – VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO RACIONAL

Se dice que un nº racional $\alpha = \{a/b\}$ es positivo [$\alpha > 0$ o $\alpha \in Q^+$] cuando $a \cdot b > 0$; y diremos que es negativo [$\alpha < 0$ o $\alpha \in Q^-$] cuando $a \cdot b < 0$.

Llamaremos valor absoluto de un número racional α al racional no negativo dado por **$|\alpha| = \sup(\alpha, -\alpha)$**. Y de esta definición se deducen las siguientes propiedades:

a) $|\alpha| = \alpha$ si $\alpha > 0$

b) $|\alpha| = -\alpha$ si $\alpha < 0$

c) $|-\alpha| = |\alpha|$

d) $|\alpha| \geq 0$

e) $|\alpha| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$

f) $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ (desigualdad triangular)

g) $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$

9 – Q COMO AMPLIACIÓN DE Z

A simple vista resulta evidente que Q es una ampliación de Z, ya que en Q están incluidos los números del tipo $\alpha = \{a/1\}$ (es decir, está incluido cualquier $a \in Z$).

Desde un punto de vista formal este hecho se suele justificar a través de la existencia de un isomorfismo entre el conjunto Z y un subconjunto $Q^* \subset Q$ formado por las clases del tipo $\{a/1\}$.

En efecto, la aplicación $f: Z \to Q^*$ cumple las siguientes propiedades:

$$a \to \{a/1\}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(a+b) = f(a) + f(b) \\ f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b) \\ \text{Si } a<b \Rightarrow f(a)<f(b) \end{array}\right\}$$ y esto confirma la existencia del **isomorfismo entre Z y Q***.

10 – EXPRESIÓN DECIMAL DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Como sabemos, todo nº racional α se puede expresar en forma de fracción $\{a/b\}$ o a través de su expresión decimal equivalente (obtenida al hacer la división euclidea de a entre b).

A continuación vamos a repasar los distintos tipos de expresiones decimales que nos podemos encontrar:

- **Número entero**
  Se obtiene este tipo de expresión cuando a es múltiplo de b. Por ejemplo: 6/2 = 3.
- **Decimal exacto**
  Se obtiene este tipo de expresión cuando en la descomposición factorial de b sólo aparecen el 2 y/o el 5 como factores primos (suponemos que a/b ya es irreducible). Por ejemplo: 7/10 = 0´7.
- **Decimal periódico puro**
  Se obtiene este tipo de expresión cuando en la descomposición factorial de b no aparecen ni el 2 ni el 5 como factores primos (como antes, a/b ya es irreducible). Por ejemplo: 8/3 = 2´33333..... = $2'\widehat{3}$
- **Decimal periódico mixto**
  Se obtiene este tipo de expresión cuando en la descomposición factorial de b aparecen, además del 2 y/o el 5, otros factores distintos (otra vez, a/b ya es irreducible). Por ejemplo: 13/6 = 2´166666..... = $2'1\widehat{6}$

Como es lógico, también es posible realizar el proceso inverso; es decir, a partir de una expresión decimal obtener la **fracción generatriz** correspondiente.
Por ejemplo:

a) $2'5 = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$ b) $2'\widehat{3} = \frac{23-2}{9} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$ c) $1'2\widehat{3} = \frac{123-12}{90} = \frac{111}{90} = \frac{37}{30}$

11 – CONCLUSIÓN

Evidentemente, el manejo de los números racionales juega un papel fundamental dentro del currículo de la enseñanza secundaria; aunque su tratamiento, como es lógico, estará **exento de los formalismos** empleados a lo largo del tema.

De hecho, el estudio de los números racionales en secundaria se centra en la realización de operaciones con ellos y en sus aplicaciones a la hora de resolver problemas reales de la vida cotidiana (tratando siempre de hacer énfasis en el carácter práctico y funcional de las Matemáticas, con el fin de contribuir de forma eficaz a la adquisición de las **Competencias Básicas** establecidas en la LOE y desarrolladas en el decreto 133/07 del currículo para la Comunidad autónoma de Galicia).

12- BIBLIOGRAFÍA